

CAPITULO 3

MEDICIÓN DE DISTANCIAS

3. Medición de distancias	3-1
3.1. Distancia topográfica	3-1
3.2. Medición de distancias con odómetro	3-2
3.3. Medición de distancias con telémetro	3-3
3.4. Medición de distancias con cintas de acero	3-3
3.4.1. Corrección de errores sistemáticos	3-4
3.4.2. Errores aleatorios	3-12
3.4.3. Errores groseros	3-14
3.4.4. Errores accidentales	3-14
3.5. Medición óptica de distancias	3-14
3.6. Medición de distancias con mira horizontal invar.	3-20
3.7. Medición de distancias con distanciómetros electrónicos	3-22
Problemas propuestos	3-25

3. MEDICIÓN DE DISTANCIAS

La medición de la distancia entre dos puntos constituye una operación común en todos los trabajos de topografía. El método y los instrumentos seleccionados en la medición de distancias dependerá de la importancia y precisión requeridas.

En estudios de reconocimientos previos, en algunos trabajos geológicos, de agricultura, en localización de puntos o marcas sobre el terreno para operaciones de replanteo, etc., es común medir la distancia con telémetro o por conteo de pasos.

En el proceso de control de demarcaciones sobre el pavimento, determinación de la longitud de una vía construida, etc., es común el uso del odómetro. En levantamientos que requieran mayor precisión, se emplean cintas de acero y distanciómetros electrónicos. En algunos casos especiales, donde se requiere de cierta precisión y rapidez, se utilizan el teodolito y las miras verticales u horizontales como métodos indirectos para la medida de distancias.

3.1. Distancia Topográfica

Todos los levantamientos topográficos son representados a escala sobre el plano horizontal, por lo que cuando se mide una distancia entre dos puntos sobre la superficie terrestre, ésta debe ser en proyección horizontal.

Si como sabemos, la Tierra puede ser considerada como una esfera, ¿hasta qué punto podemos admitir que la distancia proyectada sobre el plano horizontal es, sin apreciable error, igual a la distancia real? en otras palabras, ¿hasta qué punto, la Tierra puede ser considerada plana?.

Para resolver el problema planteado, supongamos, con la ayuda de la figura 3.1., que conocemos la distancia real entre los puntos $\widehat{AB}$; la distancia en proyección sobre el plano horizontal tangente en el punto A es la distancia $\overline{AB'}$; la diferencia entre la distancia en proyección ($\overline{AB'}$) y la distancia real ($\widehat{AB}$) es el error E que se comete al considerar la Tierra como plana.

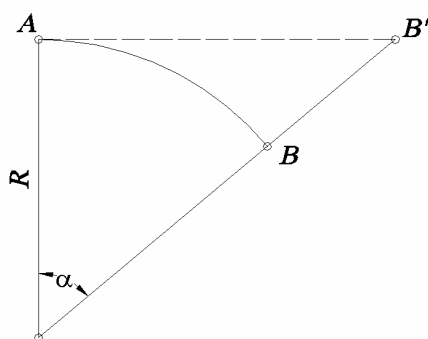


Figura 3.1

De la figura 3.1 tenemos:

$$\overline{AB'} = R \tan \alpha \quad (3.1)$$

en donde:

R = radio de la Tierra = 6.367 km y α , por definición de radian

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\widehat{AB}}{R} \quad (3.2)$$

$$E = \overline{AB'} - \widehat{AB} \quad (3.3)$$

La tabla 3.1. se calcula aplicando las ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3 para distintos valores de $\widehat{AB}$.

Tabla 3.1

AB (m)	α	AB' m	E(m)	E' (mm/km)	Er	Er
20.000	0°10'48"	20.000,0658	0,0658	3.289	1/304.039	1/300.000
25.000	0°13'30"	25.000,1285	0,1285	5.1392	1/194.584	1/200.000
30.000	0°16'12"	30.000,2220	0,2220	7.4004	1/135.128	1/135.000
35.000	0°18'54"	35.000,3525	0,3525	10.0718	1/99.287	1/100.000
40.000	0°21'36"	40.000,5263	0,5263	13.1564	1/76.009	1/76.000

Considerando que los modernos instrumentos para la medición de distancias nos pueden dar precisiones de hasta 5 mm/km, podríamos tomar 25 km como límite del campo topográfico para la medición de distancias, ya que el error relativo que se comete al considerar al Tierra como plana, es aproximadamente igual a la máxima precisión obtenida.

En la medición de distancias con cinta métrica, en donde la máxima precisión que se puede obtener el alrededor de 1/10.000, se podría aumentar el límite de campo topográfico hasta 30 km, ya que como veremos más adelante, en el capítulo correspondiente a mediciones angulares, el límite del campo topográfico angular es de 30 km.

3.2. Medición de Distancias con Odómetro

El odómetro o rueda de medición (figura 3.2), es una rueda que al girar sobre la superficie del terreno, convierte el número de revoluciones obtenidas en distancia inclinada, la cual puede ser leída directamente sobre un contador o pantalla digital.

A pesar de ser un instrumento rápido y fácil de utilizar, su precisión es limitada, por lo que básicamente se utiliza en el chequeo de distancias realizadas por otros métodos, reconocimientos previos, inventarios viales etc.

La máxima precisión relativa que puede lograrse en la medición de distancias con el odómetro es 1:200 sobre superficies lisas.



Figura 3.2. Odómetros Sokkia

3.3. Medición de Distancias con Telémetro

El telémetro (figura 3.3), es un instrumento óptico que mide distancias inclinadas por simple colimación, sin necesidad de colocar miras ni señales en el punto al cual se desea determinar la distancia.

Debido a su limitada precisión, su uso queda prácticamente restringido a operaciones de exploración y reconocimiento, estudios de rutas, etc., siendo su mayor aplicación en operaciones militares.



Figura 3.3. Telímetros Sokkia

3.4. Medición de Distancias con Cintas de Acero

Como se vio en capítulo correspondiente a instrumentos simples, la precisión de la medición de distancias con cintas métricas depende de las condiciones de calibración especificadas por el fabricante.

Difícilmente en campo podemos obtener las condiciones de calibración; además, en el proceso de medición se introducen una serie de errores tanto sistemáticos como aleatorios que son inevitables, pero que podemos corregir o reducir al mínimo mediante el empleo de técnicas y equipos adecuados.

Otro tipo de errores, no predecibles en magnitud y por lo tanto difíciles de detectar y corregir, son los errores groseros, los cuales se cometen generalmente por distracción o falta de concentración en el trabajo.

Errores Sistemáticos

- Pendiente
- Graduación
- Temperatura
- Tensión
- Catenaria

Errores Aleatorios

- Pendiente
- Temperatura
- Tensión

- Catenaria
- Alineación
- Verticalidad del marcado

Errores Groseros

- Confundir marcas en el terreno
- Error de lectura
- Error de anotación
- Errores aritméticos al sumar distancias parciales

Nótese que los errores de pendiente, temperatura, tensión y catenaria aparecen tanto en los errores sistemáticos como en los aleatorios. Esto se debe a que, aunque sean corregidos sistemáticamente, existe la posibilidad de error en la determinación de los parámetros de corrección; por ejemplo, en la medición de la pendiente o de la temperatura.

3.4.1. Corrección de Errores Sistemáticos. *Corrección por Pendiente*

Como se mencionó previamente, las distancias topográficas son distancias proyectadas sobre el plano horizontal.

En el proceso de medición, dependiendo del tipo de terreno y de la longitudinal del tramo a medir, la distancia puede ser medida directamente en su proyección horizontal o inclinada paralela a la superficie del terreno tal y como se muestra en la figura 3.4.

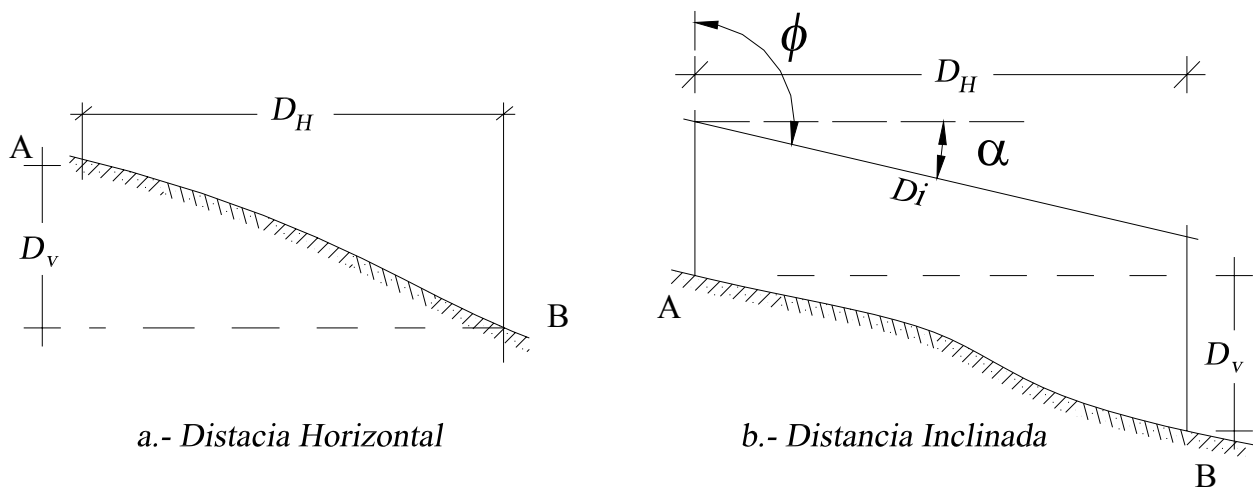


Figura 3.4. Distancia horizontal y Distancia inclinada

Para medir directamente la distancia horizontal, es necesario la utilización de un nivel de mano o nivel locke para chequear la horizontalidad de la cinta.

En el caso de que se mida la distancia inclinada, es necesario medir la inclinación de la cinta o la distancia vertical (desnivel) entre los puntos para calcular la distancia horizontal.

Según la figura 3.4.b., la distancia horizontal puede ser calculada:

$$\left. \begin{aligned} D_H &= D_i \cos \alpha \\ D_H &= D_i \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$D_H = \sqrt{D_i^2 - D_v^2} \quad (3.5)$$

en donde:

D_H = distancia horizontal

D_i = distancia inclinada

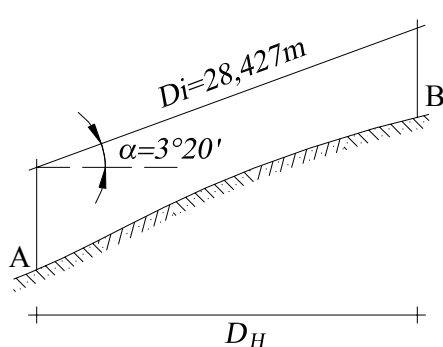
α = ángulo de inclinación de la cinta

ϕ = ángulo cenital

D_v = distancia vertical o desnivel

Ejemplo 3.1

Calcular la distancia horizontal entre los puntos A y B de la figura E3-1 conociendo:



$$\alpha = 3^\circ 20'$$

$$D_i = 28,427 \text{ m}$$

Solución

Aplicando la ecuación 3.4

$$D_H = 28,427 \times \cos(3^\circ 20') = 28,379 \text{ m}$$

$$D_H = 28,379 \text{ m}$$

Figura E3-1

Ejemplo 3.2

Para la determinación de la distancia horizontal entre dos puntos, se midió una distancia inclinada $D_i = 24,871 \text{ m}$ y con la ayuda de un clisímetro se determinó que la pendiente de la cinta en el momento de la operación fue del 3,4%. Calcule la distancia horizontal.

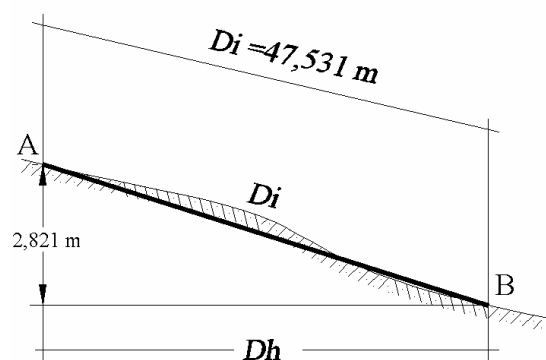
Solución

$$p = \tan \alpha = \frac{3,4}{100} \Rightarrow \alpha = 1^\circ 56' 50''$$

$$D_H = 24,871 \times \cos(\alpha) = 24,857 \text{ m}$$

Ejemplo 3.3

Con los datos de la figura E3-3, calcule la distancia horizontal entre A y B



Solución

Aplicando la ecuación (3.5)

$$D_H = \sqrt{47,531^2 - 2,821^2} = 47,447$$

$$D_H = 47,447 \text{ m}$$

Figura E3-3

Lógicamente podría pensarse que lo descrito anteriormente es simplemente el proceso de convertir una distancia inclinada a una distancia horizontal; sin embargo, sería interesante preguntarse cuál podría ser la magnitud del error en la determinación de la distancia horizontal cuando el ángulo de inclinación es medido con instrumentos de poca precisión (como el nivel Abney con apreciación de 10 minutos).

Para responder la interrogante planteada, supondremos operaciones de medición con cintas inclinadas 2, 4, 6, 8 y 10°, con errores de 10 minutos en la lectura.

Los cálculos realizados, resumidos en la tabla 3.2, muestran que para mantenernos dentro de las precisiones requeridas al hacer mediciones con el empleo del nivel Abney, el ángulo de inclinación de la cinta no debe superar los cuatro grados.

Tabla 3.2
Error Relativo para Diferentes Angulos de Inclinación con Apreciación de $\pm 10'$

α	2°	4°	6°	8°	10°
Er	1:10000	1:5000	1:3000	1:2500	1:2000

Corrección por Graduación

Por diferentes razones, como por ejemplo la calidad de la cinta, errores de graduación o separación entre marcas, o simplemente variación de la longitud original de la cinta debido al uso o reparaciones efectuadas a la cinta, la longitud original o nominal de la cinta no coincide con la longitud actual de la misma, generando por lo tanto errores en la medición de distancias.

Para corregir estos errores, es necesario que la cinta sea comparada con una distancia patrón, medida con precisión sobre una base de longitud igual a la longitud de la cinta y bajo las condiciones normales especificadas por el fabricante.

La longitud actual de cinta puede ser mayor o menor que el valor nominal de la misma, por lo que en la operación de medir una distancia en el campo la corrección puede ser positiva o negativa respectivamente.

En operaciones de replanteo con cintas no estándar, las correcciones son de signo contrario a las de medición.

La corrección por graduación es lineal y se calcula por medio de la ecuación 3.6.

$$C_g = \frac{L_a - L_n}{L_n} \cdot D \quad (3.6)$$

$$D_c = D \pm C_g \quad (3.7)$$

En donde:

C_g = corrección por graduación

L_a = longitud actual de la cinta

L_n = longitud nominal de la cinta

D = distancia medida

D_c = distancia corregida

Ejemplo 3.4

En una operación de campo se midió una distancia de 192,354 m con una cinta metálica de 30 m. La cinta fue previamente comparada con una base, arrojando una longitud real de 30,005 m.

Calcule la corrección por graduación (C_g) y distancia corregida.

Solución

Aplicando la ecuación 3.6 tenemos:

$$C_g = \frac{30.005 - 30.000}{30.000} \times 192,354 = +0,032m$$

Aplicando la ecuación 3.7 tenemos

$$C_g = + 0,032 \text{ m}$$

$$D_c = 192,354 + 0,032 = 192,386 \text{ m}$$

$$D_c = 192,386 \text{ m}$$

Ejemplo 3.5

Suponga que se requiere replantear una distancia de 27,854 m con la misma cinta del ejemplo 3.1. Calcule la corrección por graduación y la lectura en la cinta para eliminar el error de graduación.

Solución

Aplicando la ecuación 3.6 tenemos

$$C_g = \frac{30,005 - 30,000}{30,000} \times 27,854 = +0,005m$$

Como se trata de una operación de replanteo con una cinta con longitud mayor que la nominal, la corrección debe ser negativa.

$$D_c = 27,854 - 0,005 = 27,849 \text{ m}$$

Por lo tanto, para colocar la marca sobre el terreno debemos medir una distancia de 27,849 m.

Corrección por Temperatura

Recordemos, de los cursos de física, que los materiales al ser sometidos a cambios de temperatura, experimentan un cambio en sus dimensiones.

Se define como dilatación lineal a la variación de longitud que experimenta un cuerpo al ser sometido a una variación de temperatura.

La variación lineal es directamente proporcional a la longitud inicial y a la variación de la temperatura.

$$\Delta l = \alpha \cdot L \cdot \Delta t \quad (3.8)$$

Donde:

Δl = variación lineal (corrección por temperatura)

L = longitud de la medida

Δt = variación de la temperatura en °C

α = coeficiente de dilatación lineal (variación de la longitud por unidad de longitud para un Δt igual a un grado)

Para el acero $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Como sabemos, las cintas de acero vienen normalizadas por los fabricantes para medir la longitud nominal a la temperatura de calibración, generalmente de 20°C.

Por lo general, en la medición de distancias la temperatura a la cual se realiza la medición es distinta a la temperatura de calibración, siendo necesario hacer correcciones por temperatura.

La ecuación 3.8 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$C_t = \alpha \cdot (t - t_c) \cdot L \quad (3.9)$$

Siendo:

C_t = corrección por temperatura en m

t = temperatura de la cinta en el momento de la medición

t_c = temperatura de calibración en °C

Ejemplo 3.6

¿Cuál debe ser la corrección por temperatura que debe aplicarse a una distancia de 47,825 m, si la temperatura de la cinta en el momento de la medición fue de 29°C?

Calcule la distancia real.

Solución

Aplicando la ecuación 3.9

$$C_t = 1,2 \times 10^{-5} (29 - 20) \times 47,825 = + 0,005 \text{ m}$$

$$C_t = + 0,005 \text{ m}$$

$$D_r = 47,825 + 0,005 = 47,830 \text{ m}$$

Ejemplo 3.7

En las especificaciones para el replanteo de un punto en una obra se indica que se debe medir una distancia de 40,00 m. Si la temperatura de la cinta durante la operación es de 27°C, calcule la corrección que debe aplicarse a la medida a replantear.

Solución

Aplicando la ecuación 3.9

$$C_t = 1,2 \times 10^{-5} (27-20) 40,00 = + 0,003$$

$$C_t = + 0,003 \text{ m}$$

Como se trata de una operación de replanteo, inversa a la operación de medida, debemos cambiar el signo a la corrección por temperatura.

$$D_r = 40,000 - 0,003 = 39,997 \text{ m}$$

$$D_r = 39,997 \text{ m}$$

Corrección por Tensión

Cuando una cinta de acero es sometida a una tensión distinta a la tensión de calibración ésta se alarga o acorta según la tensión sea mayor o menor a la tensión de calibración.

El cambio de longitud de una cinta sometida a tensiones distintas a la tensión de calibración se puede calcular mediante la aplicación de la ley de Hooke, expresada por la siguiente ecuación:

$$C_T = \frac{(T - T_c)}{AE} \cdot L \quad (3.10)$$

En donde:

T = tensión aplicada a la cinta al momento de la medición, en kg

T_c = tensión de calibración en kg

L = longitud de la medida en m

A = área de la sección transversal en cm^2

E = módulo de elasticidad de Young. Para el acero $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Ejemplo 3.8

¿Cuál debe ser la corrección por tensión que debe aplicarse a una medida de longitud $L = 43,786 \text{ m}$ tomada con una cinta calibrada para una tensión $T_c = 4,5 \text{ kg}$, de sección transversal $A = 0,036 \text{ m}^2$ si al momento de la medida se aplicó una $T = 9 \text{ kg}$?

Solución

Aplicando la ecuación (3.10)

$$C_T = \frac{(9 - 4,5) \times 43,786}{0,036 \times 2,1 \times 10^6} = +0,003 \text{ m}$$

$$C_T = + 0,003 \text{ m}$$

Luego la distancia real será

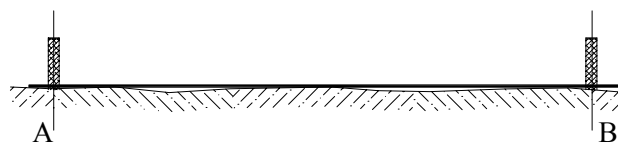
$$D_R = 43,786 + 0,003 = 43,789 \text{ m}$$

$$D_R = 43,789 \text{ m}$$

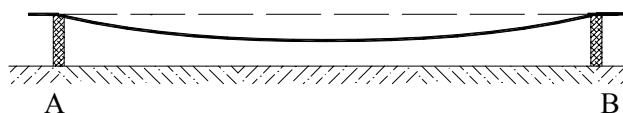
El error por tensión sólo se tiene en cuenta en mediciones de alta precisión ya que además de ser de poca magnitud es difícil aplicar tensiones mucho mayores que la tensión de calibración.

Corrección por Catenaria

Una cinta sostenida solamente en sus extremos describe, debido a su propio peso, una curva o catenaria que introduce un error positivo en la medición de la distancia.



a.- Cinta apoyada en toda su longitud



b.- Cinta apoyada en sus extremos

Figura 3.5

Observando la figura 3.5. podemos darnos cuenta que medir una distancia con una cinta apoyada solamente en sus extremos, dará un valor erróneo mayor que al medirla con una cinta apoyada en toda su extensión, debido a que la longitud de la cuerda es menor que la longitud del arco.

La corrección por catenaria se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$Cc = \frac{-w^2 L^3}{24T^2} \quad (3.11)$$

en donde:

Cc = corrección por catenaria

w = peso de la cinta por unidad de longitud en kg/m

L = longitud de la medida en m

T = tensión aplicada a la cinta en el momento de la medida en Kg.

Algunas personas prefieren calcular la tensión que debe aplicarse en el momento de tomar la medida para compensar los errores de tensión y catenaria. Esta tensión se conoce como tensión normal (T_n).

Ejemplo 3.9

Calcular la tensión normal que hay que aplicar a una cinta de acero para medir una distancia $L = 46,538$ m si la tensión de calibración es $T_c = 4,5$ kg, $w = 0,015$ kg/ml, $A = 0,020$ cm²

Solución

Como por definición la tensión normal T_n es la tensión que hay que aplicar a la cinta en el momento de la medida para que las correcciones por tensión y catenaria se compensen, tenemos

$$C_T + C_c = 0$$

$$\frac{(T - T_c)L}{AE} - \frac{w^2 L^3}{24T^2} = 0$$

haciendo $T = T_n$ y despejando

$$T_n = wL \cdot \sqrt{\frac{AE}{24(T_n - T_c)}} \quad (3.12)$$

Sustituyendo valores y resolviendo por iteraciones, tenemos que,

$$T_n \cong 11,245 \text{ kg}$$

3.4.2. Errores Aleatorios

Error de Alineación

Cuando la longitud de la distancia a medir es mayor que la longitud de la cinta métrica disponible, se hace necesario trazar en el campo un alineamiento con tramos parciales menores o iguales a la longitud de la cinta. Si este alineamiento es hecho a ojo, sólo con la ayuda de jalones, se puede introducir un error en el alineamiento que afecte el valor final de la medida.

La figura 3.6 representa el error de alineamiento en la medición de la distancia $\overline{AB}$ en donde d_1 , d_2 y d_3 son las distancias parciales medidas y e_1 , e_2 representan el desplazamiento de los puntos 1 y 2.

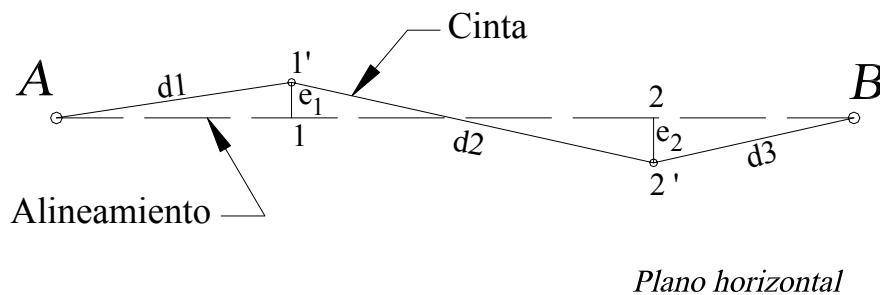


Figura 3.6 Error de Alineación

La distancia medida entre A y B será

$$D'_{AB} = d_1 + d_2 + d_3$$

la distancia real entre AB será

$$D_{AB} = D_{A1} + D_{12} + D_{2B}$$

Luego, el error de alineamiento

$$E_A = D'_{AB} - D_{AB}$$

Como se puede observar, el error de alineamiento siempre será positivo por lo que la corrección debe ser negativa.

Ejemplo 3.10

Suponga que en la figura 3.6

$$\begin{array}{ll} d_1 = d_2 = 30 \text{ m} & e_1 = 18 \text{ cm} \\ d_3 = 26,542 \text{ m} & e_2 = 15 \text{ cm} \end{array}$$

Solución

$$D'_{AB} = 30 + 30 + 26,542 \text{ m}$$

por Pitágoras

$$D_{A-I} = \sqrt{d_1^2 - e_1^2} = \sqrt{30^2 - 0,18^2} = 29,999$$

$$D_{1-2} = \sqrt{d_2^2 - (e_1 + e_2)^2} = \sqrt{30^2 - 0,33^2} = 29,998$$

$$D_{2-B} = \sqrt{d_3^2 - e_2^2} = \sqrt{26,542^2 - 0,15^2} = 26,542$$

$$D_{AB} = 86,539 \text{ m}$$

$$E_A = 0,003 \text{ m}$$

Obsérvese que el error por alineamiento es pequeño, y en operaciones de alta precisión se puede evitar trazando los alineamientos con la ayuda de un teodolito.

Error de Verticalidad

Es el error que se comete al no proyectar perpendicularmente el punto del terreno sobre la cinta en posición horizontal.

Como se puede observar en la figura 3.7 a y b, el error de verticalidad puede ser positivo o negativo, y dependiendo de la inclinación de la señal y de la altura (h) a la cual se realiza la medida, la magnitud del error puede ser apreciable.

El error de verticalidad se elimina mediante el auxilio de una plomada y de un jalón como se muestra en la figura 3.7.c

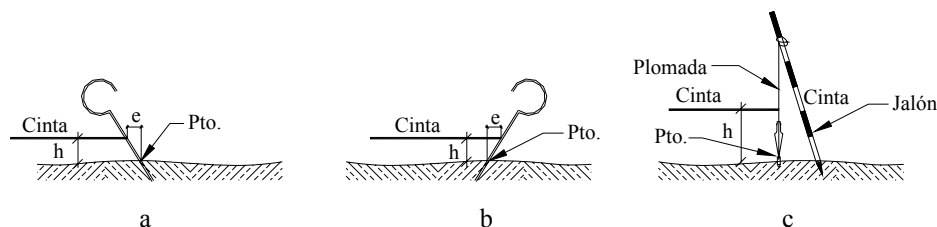


Figura 3.7. Error de verticalidad

3.4.3. Errores Groseros

Los errores groseros o equivocaciones son errores que se cometen por distracción del operador o por otras causas y son totalmente impredecibles.

Las equivocaciones más comunes en la medición de distancias son las siguientes:

- Identificación errónea de un punto
- Error de lectura por transposición de números como por ejemplo, leer 34,43 por 43,34.
- Error de anotación por transposición de números. Similar al anterior pero al momento de anotar.
- Errores aritméticos al sumar mentalmente distancias en el campo.

La manera de minimizar la ocurrencia de los errores es estableciendo una rutina para el proceso de medición, como por ejemplo, la medida de la distancia en ambos sentidos.

3.4.4. Errores Accidentales

Son aquellos errores inevitables que el operador no puede detectar ni con equipos ni con métodos determinados.

Los errores accidentales están presentes en todas las mediciones, sus causas son múltiples y no conocidas por lo que obedecen a las leyes del azar y deben ser tratados de acuerdo con las leyes de probabilidad.

El estudio de los errores accidentales nos permite determinar la bondad de las mediciones, seleccionar el método requerido para lograr una mayor precisión y establecer las tolerancias relativas.

Una información detallada acerca de la Teoría de Errores Accidentales puede ser consultada en Kissan¹

3.5. Medición Óptica de Distancias

Con Visual Horizontal

En el proceso de levantamientos topográficos de detalles en donde los puntos de relleno a levantar no requieren de una gran precisión, se utiliza, debido a su sencillez y rapidez, el método óptico de medición de distancias.

¹ Kissan P. (1967). *Topografía Para Ingenieros*, New York: McGraw-Hill. Pp. 549-569

En la figura 3.8.a se representa en forma idealizada el sistema óptico de un telescopio con sistema de enfoque interno.

En el retículo del telescopio vienen incorporados un par de hilos distanciométricos horizontales, tal y como se muestra en la figura 3.8.b.

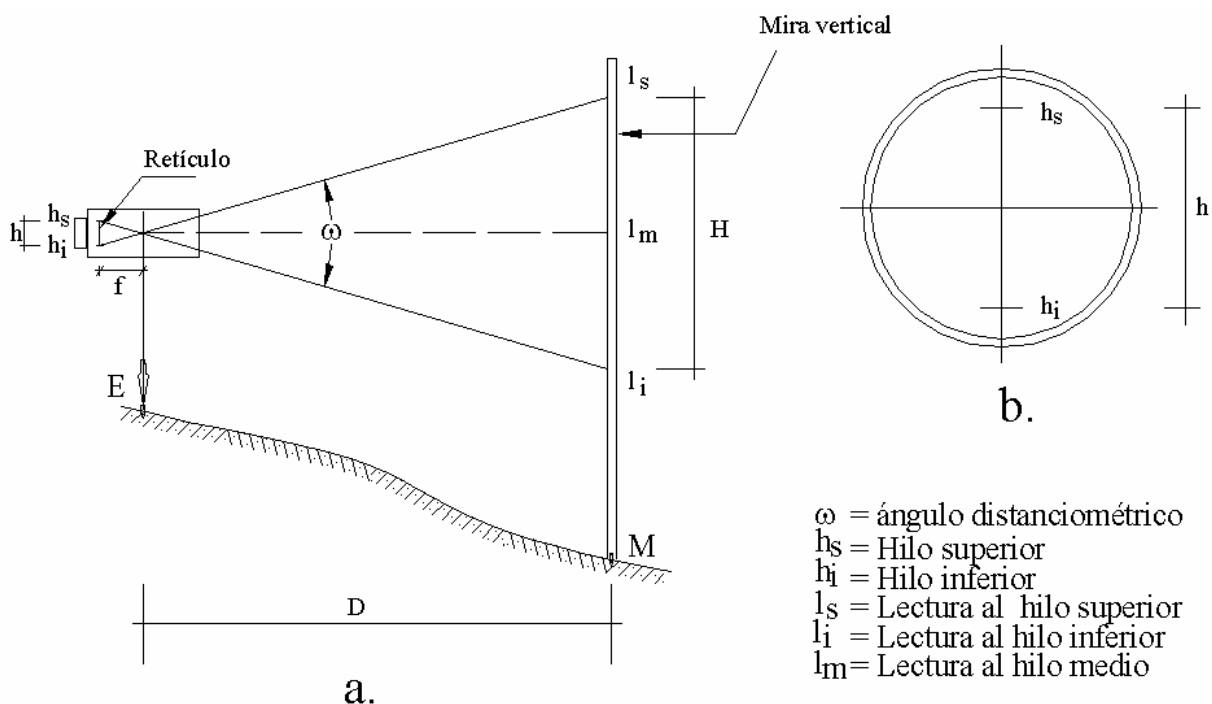


Figura 3.8. Representación idealizada de telescopio con sistema de enfoque interno

De la figura 3.8.a. podemos obtener, por relación de triángulos

$$D = \frac{f}{h} \cdot H \quad (3.13)$$

siendo:

D = distancia entre el punto de estación "E" y "M" el punto de mira

f = distancia focal (constante)

h = separación entre el retículo superior y el inferior constante

H = distancia de mira interceptada por los retículos

$H = L_s - L_i$

La relación f/h es la constante distanciométrica K , con un valor generalmente de 100 para facilitar el cálculo de la distancia.

$$K = \frac{f}{h} = \frac{1}{2 \tan \frac{\omega}{2}} = 100 \quad (3.14)$$

Sustituyendo la (3.14) en la (3.13)

$$D = KH$$

$$D = 100.H$$

Reemplazando el valor de H

$$D = 100 (l_s - l_i) \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.16) se utilizan en el cálculo de distancias con telescopios con sistema de enfoque interno y eje de colimación horizontal.

Para telescopios más antiguos, en donde el foco del objetivo no coincide con el centro del telescopio, es necesario tomar en cuenta la distancia constante entre el foco y el centro del instrumento, conocida como constante aditiva.

Con Visual Inclinada

En terrenos con pendiente, se hace necesario inclinar el telescopio un ángulo α con respecto a la horizontal.

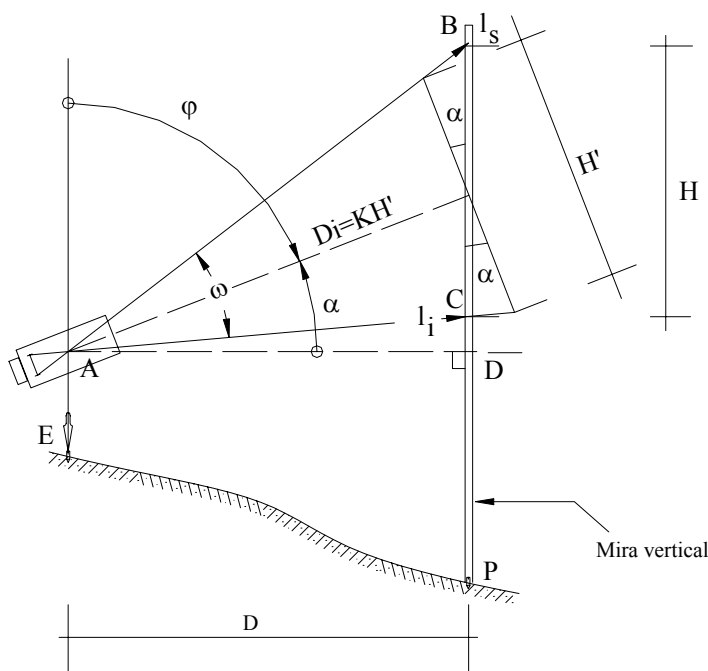


Figura 3.9. Medición óptica de distancia con lente inclinado

Calculando la distancia horizontal a partir de la figura 3.9 se tiene

$$D = AC \cdot \cos\left(\alpha - \frac{w}{2}\right) \quad (3.17)$$

Del triángulo ABC

$$\frac{AC}{\sin\left[90 - \left(\alpha + \frac{w}{2}\right)\right]} = \frac{H}{\sin w}$$

$$AC = \frac{H}{\text{sen } w} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{w}{2}\right) \quad (3.18)$$

Reemplazando (3.18) en (3.17)

$$D = \frac{H}{\text{sen } w} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{w}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{w}{2}\right) = H \left[\cos^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \frac{w}{2}}{\text{sen } w} - \text{sen}^2 \alpha \cdot \frac{\text{sen}^2 \frac{w}{2}}{\text{sen } w} \right] =$$

$$D = H \left[\frac{\cos^2 \alpha}{2 \text{tg} \frac{w}{2}} - \frac{\text{sen}^2 \alpha \cdot \tan \frac{w}{2}}{2} \right] \quad (3.19)$$

Recordando que

$$K = 1/2 \tan(w/2) \quad (3.14)$$

$$D = KH \cos^2 \alpha - \frac{H}{4K} \cdot \text{sen}^2 \alpha \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) nos da la distancia horizontal tomada con un telescopio inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal.

Analizando el último término de la ecuación (3.20) para valores máximos de H y α , y para K=100.

$H_{\text{max}} = 4$ m (altura de la mira vertical)

K = 100 para la mayoría de los instrumentos modernos

$\alpha_{\text{max}} = \pm 45^\circ$

tenemos

$$\frac{4}{4 \times 100} \cdot \text{sen}^2 45^\circ = 0,005 \text{ m}$$

valor despreciable que nos permite simplificar la (3.20)

$$D = KH \cos^2 \alpha \quad (3.21)$$

$$D = 100(ls - li) \cdot \cos^2 \alpha$$

Para teodolitos que miden ángulos cenitales (φ), el valor de la distancia horizontal se calcula mediante la ecuación.

$$D = KH \text{sen}^2 \varphi$$

$$D = 100(ls - li) \cdot \text{sen}^2 \varphi \quad (3.22)$$

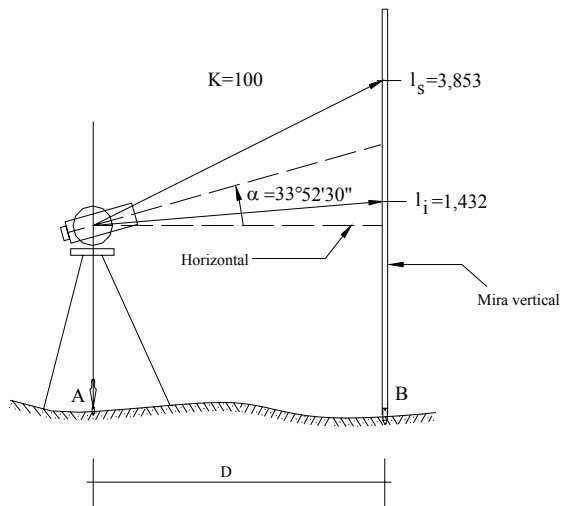


Figura E3.11

Ejemplo 3.11

Con los datos que se indican en la figura E3-11, calcule el error cometido por simplificación de la (3.20)

Solución

Valor de la distancia aplicando la (3.20)

$$\begin{aligned}
 K &= 100 & H &= (3,853 - 1,432) = 2,421 \\
 D &= 100 \times 2,421 \times \cos^2(33^\circ 52' 30'') - (2,421/4 \times 100) \times \sin^2 33^\circ 52' 30'' \\
 D &= 166,885 - 0,002 = 166,883 \text{ m} \\
 D &= 166,883 \text{ m (valor real)}
 \end{aligned}$$

Valor aproximado simplificando la (3.21)

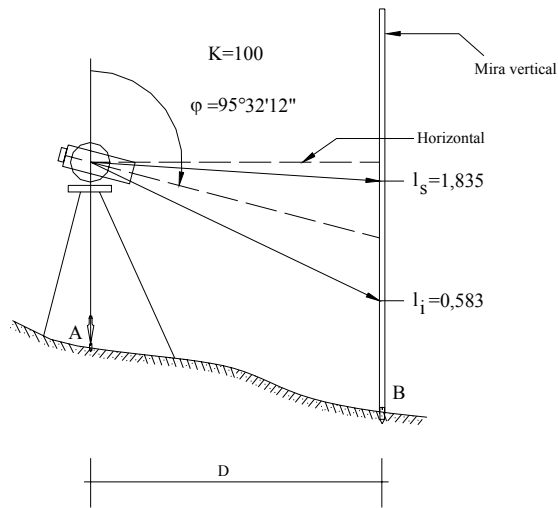
$$\begin{aligned}
 D &= 100 \times 2,421 \cos^2(33^\circ 52' 30'') = 166,885 \text{ m} \\
 D &= 166,885 \text{ m}
 \end{aligned}$$

La diferencia entre el valor real y el valor aproximado será el error cometido por simplificación de la ecuación.

$$E = 166,883 - 166,885 = -0,002 \text{ m}$$

valor despreciable ya que el error relativo sería:

$$\begin{aligned}
 Er &= 1/(166,883/0,002) = 1/83.441,5 \\
 Er &= 1/83.500
 \end{aligned}$$

**Figura E3-12****Ejemplo 3.12**

Con los valores indicados en la figura E3-12, calcule el valor de la distancia horizontal entre el punto A y el punto B.

Solución

Aplicando la ecuación (3.22) tenemos:

$$D = 100(l_s - l_i) \cdot \sin^2 \varphi = 100(1,835 - 0,583) \sin^2(95^\circ 32' 12'') = 124,035 \text{ m}$$

$$D = 124,035 \text{ m}$$

Errores en la Determinación Óptica de Distancias

Además del error por simplificación de la ecuación (3.20), en la determinación óptica de distancias con mira vertical podemos observar los siguientes errores:

- Error de apreciación en la lectura de la tercera cifra decimal a la mira vertical. Salvo en mediciones de distancias con mira vertical de “invar” y micrómetro óptico, en la lectura a un a mira vertical la tercera cifra decimal se determina a ojo con una apreciación de hasta 1 mm que al ser multiplicado por la constante K introducirá un error de 10 cm en la determinación de la distancia.
- Error de graduación de la mira.
- Error por temperatura.
- Error inducido por las articulaciones para el pliegue de las miras (figura 2.12 p 2-9).
- Error por refracción de la visual.
- Error por la evaporación del aire. Se detecta en la parte inferior de la mira por efecto de la humedad y el calor.
- Error instrumental por inexactitud en la determinación de K. Este error se considera despreciable debido a la precisión de las técnicas de construcción de los instrumentos.
- Error de inclinación de la mira.

La mayoría de los errores descritos se pueden reducir al mínimo siguiendo las reglas y procedimientos que se indican:

- Mantener el ángulo de inclinación de la visual lo más horizontal posible.
- Utilizar nivel esférico de mano para la verticalización de la mira.
- Tomar las lecturas a la mira a una altura del suelo donde no se afecten por el movimiento del aire por evaporación.
- No hacer lecturas en horas de mucho calor.
- No tomar lecturas a distancias mayores de 100 a 120 m.
- Ajustar periódicamente las articulaciones de la mira.

3.6. Medición de Distancias con Mira Horizontal Invar.

Aunque actualmente en desuso, la mira horizontal de invar descrita en el capítulo 2.1.6., página 2-10, fue un instrumento ampliamente utilizado en la medición indirecta de distancias en terrenos accidentados.

El principio utilizado para la medición de distancias con mira horizontal de invar se explica con la ayuda de la figura 3.10.

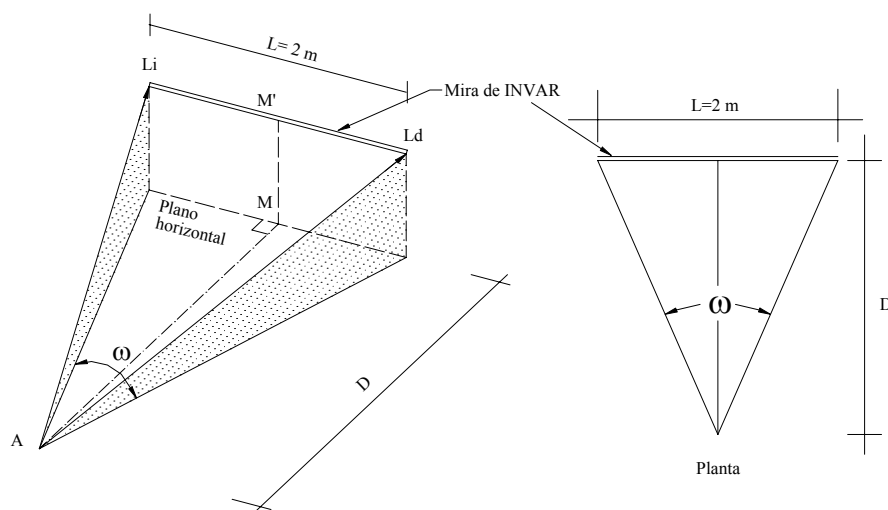


Figura 3.10 Medida de distancias horizontales con mira de invar

Si estacionamos un teodolito en un punto A y la mira en un punto M y hacemos que el brazo de la mira quede perpendicular a la línea AM, formando de esta manera un triángulo isósceles, la distancia horizontal D entre AM se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$D = \frac{L}{2} \cot g \frac{\omega}{2} \quad (3.23)$$

en donde:

L = distancia entre las marcas de la mira ($L = 2$ m)

w = ángulo diastimométrico (entre marcas) medido

Como se mencionó previamente, debido a las características de invariabilidad y de construcción de la mira, se puede afirmar que L es constante e igual a 2 m, por lo que la (3.23) se puede escribir

$$D = \cot g \frac{w}{2} \quad (3.24)$$

Como se puede observar de la ecuación (3.23), el valor de la distancia depende solamente del ángulo medido y si, como sabemos, el valor de la cotangente de un ángulo es muy sensible a la variación del mismo, se hace necesario determinar el ángulo con la mayor precisión posible.

La variación de una distancia en función de la variación del ángulo medido viene dada por:

$$dD = \pm \frac{D^2}{b} \times \frac{dW''}{206265''} \quad (3.25)$$

La tabla 3.3 nos da el error resultante en mm para las distancias indicadas y ángulo w con precisión de $\pm 1''$.

Tabla 3.3.
Variación de la Distancia con respecto a w

D(m)	20	40	60	80	100	150	200	300	400	500
E mm	1,0	3,9	8,7	16	24	55	97	218	388	606
Er	20.000	10.250	6.900	5.000	4.200	2.750	2.100	1.375	1.030	825

Nótese que para mantenernos dentro de las tolerancias comúnmente permitidas en la medición de distancias, la distancia a medir no debe ser mayor a 80 m. En caso de querer aumentar la precisión o medir distancias mayores, se hará necesario dividir la distancia en tramos parciales o utilizar bases auxiliares.

Para una discusión más detallada sobre el tema se recomienda consultar Costantini² y Berchtold³.

² Costantini W. (1975). *Topografía I*, Mérida, Venezuela. Universidad de Los Andes. p 6.6, 6.26.

³ Berchtold E. *Mesure Optique des Distances*. Wild Heerbrugg Société Anonyme, Heerbrugg Suisse.

Ejemplo 3.13

Calcule la distancia horizontal medida con mira horizontal de invar si el valor de $w=1^{\circ}21'12''$

Solución

Aplicando la (3.24)

$$D = \cot g \left(\frac{1^{\circ}21'12''}{2} \right) = 84,670m$$

$$D = 84,670 \text{ m}$$

Ejemplo 3.14

Calcule el error que se cometería en la medición de la distancia del ejemplo 3.13 si se comete un error de $1''$ en la determinación de w .

Solución

Suponiendo un error de $1''$ en el ángulo w medido en el ejemplo 3.13 y aplicando la ecuación (3.24) tenemos,

$$D = \cot g \left(\frac{1^{\circ}21'13''}{2} \right) = 84,652m$$

Luego, el error vendría dado por la diferencia entre la distancia calculada en el ejemplo 3.13 y la distancia calculada en el ejemplo 3.14.

$$E = 84,670 - 84,652 = 0,018 \text{ m}$$

$$E = 18 \text{ mm}$$

3.7. Medición de Distancias con Distanciómetros Electrónicos

Como se mencionó en el capítulo 2, correspondiente a instrumentos topográficos, los distanciómetros electrónicos utilizan microondas u ondas luminosas para la determinación de distancias.

Los distanciómetros de microondas (ondas de radio) requieren en ambos extremos de emisores y receptores de onda, mientras que los distanciómetros de ondas luminosas (rayos láser y rayos infrarrojos) requieren de un emisor en un extremo y un refractor o prisma en el extremo opuesto.

Los distanciómetros electrónicos determinan la distancia en términos del número de ondas, moduladas con frecuencia y longitud de onda conocida, que caben entre el emisor y el receptor en ambos sentidos.

Con la ayuda de las figuras 3.11 y 3.12 describiremos los parámetros involucrados en la medición electrónica de distancias.

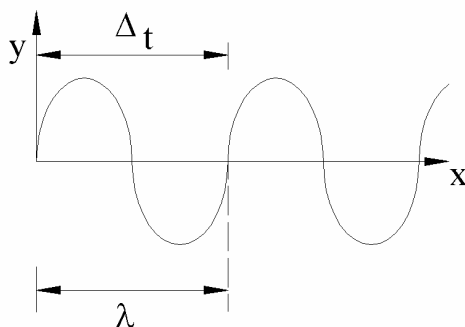


Figura 3.11. Representación de una onda luminosa

$$\lambda = \frac{V}{f} \quad (3.26)$$

siendo:

λ = longitud de onda en m

V = velocidad en km/s

f = frecuencia o tiempo en completar una longitud de onda, en hertz (1 ciclo/s)

Como por lo general, el número de ondas entre el emisor y el receptor no es un número entero, la distancia D vendrá dada por:

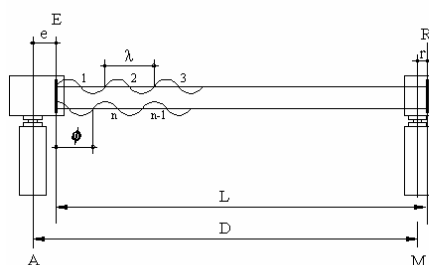
$$D = \frac{n\lambda + \phi}{2} \quad (3.27)$$

en donde:

D = distancia a medir, en m

n = número entero de ondas entre el emisor y el receptor medido en ambos sentidos

ϕ = longitud parcial de onda, o diferencia de fase, en m.



- A = Estación del distanciómetro.
- M = Estación del prisma.
- E = Plano interno de referencia del distanciómetro para la comparación de fases entre la onda transmitida y la onda recibida.
- R = Plano reflector de referencia para la onda emitida por el distanciómetro.
- e = Excentricidad del plano de referencia, constante aditiva.
- r = Excentricidad del plano del prisma reflector, constante aditiva.
- λ = Longitud de la onda modulada
- Desfase de la onda modulada ($\Delta\lambda$)

Figura 3.12. Medición de distancias con distanciómetro electrónico

La diferencia de fase se determina midiendo el tiempo de demora de fase necesario para hacer coincidir exactamente las ondas en ambos recorridos.

Correcciones Atmosféricas

La velocidad de la onda (V) varía de acuerdo a las condiciones atmosféricas según la siguiente ecuación:

$$V = \frac{V_0}{n} \quad (3.28)$$

en donde:

V = velocidad de la luz en condiciones atmosféricas prevalecientes, en km/s

V_0 = velocidad de la luz en el vacío ($V_0 = 299.792,5$ km/s)

n = índice de refracción ($n > 1$)

Los valores del índice de refracción para condiciones normales (0°C, 760 mmHg y 0,03 CO₂) y para condiciones prevalecientes pueden ser calculados utilizando las ecuaciones de Barrel y Sears⁴.

$$n_s = 1 + \left(287,604 + \frac{4,8864}{\lambda^2} + \frac{0,068}{\lambda^4} \right) 10^{-6} \quad (3.29)$$

en donde:

n_s = índice de refracción para condiciones normales

λ = longitud de onda de la onda luminosa transportadora en micrometros (μm)

y para condiciones prevalecientes, el valor del índice de refracción viene dado por la ecuación 3.30.

$$n = 1 + \frac{0,35947(n_s - 1)p}{273,2 + t} \quad (3.30)$$

siendo:

p = presión atmosférica, en mmHg

t = temperatura, en °C

En distanciómetros de microondas, se debe tomar en cuenta el efecto de la presión de vapor (e).

$$(n - 1)10^6 = \frac{103,49}{273,2 + t}(p - e) + \frac{86,26}{273 + t} \left(1 + \frac{5,748}{273 + t} \right) \quad (3.31)$$

⁴ Citado por Barry F. Kavanagh, S.J. (1989). Glenn Bird. *Surveying Principles and Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2 Ed., pp. 222, 223.

Los distanciómetros electrónicos modernos, con microprocesadores incorporados, automáticamente calculan las correcciones atmosféricas tomando en cuenta la presión atmosférica y la temperatura.

Problemas Propuestos

3.1. Calcule la distancia horizontal para cada uno de los valores de la siguiente tabla

Dist. inclinada medida	α	φ	Pendiente %	Desnivel
78,527	+10°12'			
54,318		94°36'		
238,65			-5,32	
265,27				-7,650

3.2. Para cada una de las condiciones de la siguiente tabla, calcule la distancia inclinada que debe ser medida en campo para replantear la distancia horizontal.

D. horizontal	α	φ	Pendiente
65,378	+7°21'		
82,543		89°54'	
47,351		92°17'	
38,542	-4°27'		
29,731			+5,32%
26,436			-7,24%

3.3. En la siguiente tabla se reproducen una serie de distancias tomadas en campo en condiciones normales, con una cinta nominal de 30 m. Si después de calibrar la cinta bajo las mismas condiciones normales ésta resultó con una longitud de 30,008 m, calcule los valores corregidos para cada una de las mediciones.

Dmedida	154,386	132,481	89,728	27,415
---------	---------	---------	--------	--------

3.4. Las distancias mostradas en la siguiente tabla fueron tomadas con una cinta de 50 m con las siguientes condiciones estándar.

$$t_c = 20^\circ\text{C} \quad T_c = 10 \text{ kg} \quad w = 0,018 \text{ kg/ml}$$

$$A = 0,020 \text{ cm}^2 \quad E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

En todas las mediciones la cinta fue soportada sólo en sus extremos. Calcule la distancia corregida para cada una de las medidas.

Lm	t	T
45,362	15°	5
128,325	25	5
128,325	28	8
32,154	15	10

3.5. Para las mismas condiciones del problema 3.6, calcule las distancias de replanteo.

Lproyecto	t	T
46,00	15°	5
50,00	25	10
100,00	20	5
120,00	20	10

3.6. ¿Cuál es la mínima apreciación requerida en la medición de un ángulo vertical para asegurar un error relativo menor a $1/20.000$ en la medición de una distancia de 100 m, con un ángulo de inclinación de $6^{\circ}30'$?

3.9 Calcule la distancia horizontal para cada uno de los datos en la siguiente tabla

Punto	ls	li	α	φ
1	3,451	2,893	$+2^{\circ}17'$	
2	2,315	1,274	$-5^{\circ}26'$	
3	1,570	0,570	$0^{\circ}00'$	$90^{\circ}00'$
4	3,176	2,000		$85^{\circ}32'$
5	2,500	1,732		$95^{\circ}54'$

3.7. Calcule la distancia horizontal para cada uno de los datos en la siguiente tabla

Punto	ls	lm	li	α	φ
1	3,450	3,172		$+10^{\circ}25'$	
2		1,425	1,000		$85^{\circ}32'$
3		2,000	1,500		$92^{\circ}41'$
4	2,570	1,854		$-5^{\circ}16'$	